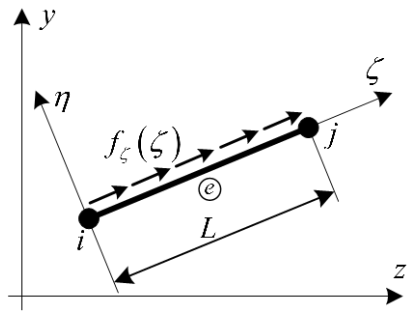
6. A végeselem közelítés pontosságának javítása – Fokszám növelés (p-verziós elemek)

A végeselem közelítés pontossága javítható:

- a végeselem hálózat sűrűségének növelésével $\Rightarrow$ több elem, több csomópont, szabadságfok növelés (h-verzió, h-konvergencia)
- az elemeken felvett közelítő polinomok fokszámának növelésével $\Rightarrow$ az elemen több csomópontot kell felvenni, szabadságfok növekedés (az eddigi ismeretek szerint)

Célkitűzés: a közelítő polinomok fokszámát úgy akarjuk növelni, hogy ne kelljen újabb csomópontokat felvenni és ennek következtében ne növekedjen az elem (rendszer) szabadságfoka.

6.1. Fokszám növelés húzott-nyomott rúdelemnél



A középvonal pontjainak rúdirányú elmozdulása $w^e(\zeta)$.

A rúdirányú fajlagos nyúlás: $\varepsilon_\zeta^e = \dfrac{dw^e}{d\zeta} = (w')^e$.

A rúdirányú normálfeszültség: $\sigma_\zeta^e = E(w')^e$.

A rúderő: $N^e = AE(w')^e$, ahol

E - az anyag rugalmassági modulusa,
A – a rúd keresztmetszetének területe.

Adott: $L, E, A, f_\zeta(\zeta)$

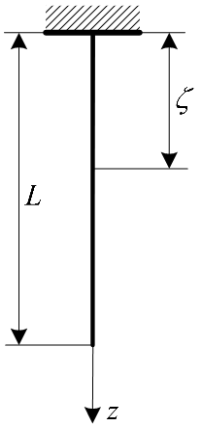
A rúderő és a rúdirányú megoszló terhelés kapcsolata: $N^e(\zeta) = N^e(\zeta=0) - \int_{\zeta=0}^{\zeta} f_\zeta^e(\zeta)\,d\zeta$,

$$\Downarrow$$

$$f^e(\zeta) = -\frac{dN^e}{d\zeta} = -AE\frac{d^2w^e}{d\zeta^2} = -AE(w'')^e.$$

Ha van $f_\zeta^e(\zeta)$ rúdirányú vonal mentén megoszló terhelés, akkor az $N^e(\zeta)$ rúderő elemenként nem állandó.

Pl.: Önsúlyával terhelt, L hosszúságú rúd.



Homogén tömegmegoszlás esetén az önsúlyból származó vonal mentén megoszló terhelés:

$f_\zeta = A\rho g = A\gamma =$ állandó.

ρ - az anyag tömegsűrűsége,

γ - az anyag fajsúlya, A a keresztmetszet területe,

A rúderő eloszlása a hossz mentén:

$N(\zeta) = A\gamma(L-\zeta)$ - lineáris függvény.

$N(\zeta=0) = A\gamma L = \underset{V}{AL}\,\gamma = G$.

- Az elmozdulásmező szokásos (lineáris) közelítése: $w^e(\zeta) = a_1 + a_2\zeta$.

$N^e(\zeta) = AE(w')^e = AEa_1 =$ állandó.

Ez a közelítés csak $N^e =$ állandó $(f_\zeta = 0)$ esetén képes a pontos megoldást leírni.

- Az elmozdulásmező közelítése fokszámnöveléssel:

$$w^e(\zeta) = a_1 + a_2\zeta + \underbrace{\hat{a}_1\zeta^2 + \hat{a}_2\zeta^3 + \hat{a}_3\zeta^4 + \ldots}_{\text{új (magasabb fokszámú) tagok}}.$$

A közelítés mátrix alakban: $w^e(\zeta)=\begin{bmatrix}1 & \zeta\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}^e+\begin{bmatrix}\zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 & \dots\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_3\\ \vdots\end{bmatrix}^e,$

$$w^e(\zeta)=\underset{(1\times 2)}{\left[\underline{\underline{\phi}}^e(\zeta)\right]^T}\underset{(2\times 1)}{\underline{\underline{a}}^e}+\underset{(1\times p)}{\left[\underline{\underline{\hat{\phi}}}^e(\zeta)\right]^T}\underset{(p\times 1)}{\underline{\underline{\hat{a}}}^e}.$$

p – a pótlólagos $\hat{a}_j$ ($j=1, 2, 3, \dots p$) állandók száma.

Az elem csomóponti elmozdulásvektora: $\underline{\underline{q}}^e=\begin{bmatrix}w_i\\ w_j\end{bmatrix}^e.$

Az a_i ($i=1, 2$) állandók kifejezése a csomóponti elmozdulásokkal:

$$\underline{\underline{q}}^e=\begin{bmatrix}w_i\\ w_j\end{bmatrix}^e=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & L\end{bmatrix}^e}_{\underline{\underline{G}}^e}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}^e+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots\\ L^2 & L^3 & L^4 & \dots\end{bmatrix}^e}_{\underline{\underline{\hat{G}}}^e}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_3\\ \vdots\end{bmatrix}^e,$$

$$\underset{(2\times 1)}{\underline{\underline{q}}^e}=\underset{(2\times 2)}{\underline{\underline{G}}^e}\underset{(2\times 1)}{\underline{\underline{a}}^e}+\underset{(2\times p)}{\underline{\underline{\hat{G}}}^e}\underset{(p\times 1)}{\underline{\underline{\hat{a}}}^e},$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{a}}^e=\left(\underline{\underline{G}}^e\right)^{-1}\underline{\underline{q}}^e-\left(\underline{\underline{G}}^e\right)^{-1}\underline{\underline{\hat{G}}}^e\underline{\underline{\hat{a}}}^e$$

A szokásos (lineáris) közelítő polinom állandói a csomóponti elmozdulásokkal és a pótlólagos állandókkal fejezhetők ki.

Visszahelyettesítve a közelítő függvénybe:

$$w^e(\zeta)=\left[\underline{\underline{\phi}}^e(\zeta)\right]^T\underbrace{\left[\left(\underline{\underline{G}}^e\right)^{-1}\underline{\underline{q}}^e-\left(\underline{\underline{G}}^e\right)^{-1}\underline{\underline{\hat{G}}}^e\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right]}_{\underline{\underline{a}}^e}+\left[\underline{\underline{\hat{\phi}}}^e(\zeta)\right]^T\underline{\underline{\hat{a}}}^e=$$

$$=\left[\underline{\underline{\phi}}^e(\zeta)\right]^T\left(\underline{\underline{G}}^e\right)^{-1}\underline{\underline{q}}^e+\left\{\left[\underline{\underline{\hat{\phi}}}^e(\zeta)\right]^T-\left[\underline{\underline{\phi}}^e(\zeta)\right]^T\left(\underline{\underline{G}}^e\right)^{-1}\underline{\underline{\hat{G}}}^e\right\}\underline{\underline{\hat{a}}}^e=$$

$$=\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\underline{\underline{q}}^e+\underline{\underline{\hat{A}}}^e(\zeta)\underline{\underline{\hat{a}}}^e=\underset{1\times(2+p)}{\left[\underline{\underline{A}}^e \;\vdots\; \underline{\underline{\hat{A}}}^e\right]}\underset{(2+p)\times 1}{\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}^e\\ \underline{\underline{\hat{a}}}^e\end{bmatrix}}.$$

p - azoknak az állandóknak a száma, amelyek nem fejezhetők ki csomóponti elmozdulásokkal.

- Fajlagos nyúlás: $$\varepsilon_\zeta^e=\frac{dw^e(\zeta)}{d\zeta}=\underset{(1\times 2)}{\frac{d\underline{\underline{A}}^e(\zeta)}{d\zeta}}\underset{(2\times 1)}{\underline{\underline{q}}^e}+\underset{(1\times p)}{\frac{d\underline{\underline{\hat{A}}}^e(\zeta)}{d\zeta}}\underset{(p\times 1)}{\hat{a}^e}=\underline{\underline{B}}^e(\zeta)\underline{\underline{q}}+\underline{\underline{\hat{B}}}^e(\zeta)\hat{a}^e.$$

- Feszültség (rúdirányú normál feszültség): $\sigma_\zeta^e=E\varepsilon_\zeta^e=E\underline{\underline{B}}^e(\zeta)\underline{\underline{q}}^e+E\underline{\underline{\hat{B}}}^e(\zeta)\underline{\underline{\hat{q}}}^e.$

  E - a rúd anyagának rugalmassági modulusa.

- Az elem potenciális energiája:

$$\pi^e = \frac{1}{2}\int_{(L)} \varepsilon_\zeta^e(\zeta)\sigma_\zeta^e(\zeta)d\zeta A - \int_{(L)} w^e(\zeta) f_\zeta(\zeta)d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2}AE\underbrace{\begin{bmatrix}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T & \left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)^T\end{bmatrix}}_{1\times(2+p)}\int_{(L)}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{\underline{B}}^e(\zeta)^T \\ \underline{\underline{\hat{B}}}^e(\zeta)^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\underline{B}}^e(\zeta) & \underline{\underline{\hat{B}}}^e(\zeta)\end{bmatrix}}_{(2+p)\times(2+p)}d\zeta\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}^e \\ \underline{\underline{\hat{a}}}^e\end{bmatrix}}_{(2+p)\times 1} - \begin{bmatrix}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T & \left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)^T\end{bmatrix}\int_{(L)}\begin{bmatrix}\underline{\underline{A}}^e(\zeta)^T \\ \underline{\underline{\hat{A}}}^e(\zeta)^T\end{bmatrix}\underline{\underline{f}}_\zeta^e(\zeta)d\zeta .$$

A - a rúdelem keresztmetszetének területe.

- Az elem merevségi mátrixa (helyi koordináta-rendszerben):

$$\underline{\underline{K}}^e = AE\int_{(L)}\begin{bmatrix}\left(\underline{\underline{B}}^e\right)^T \\ \left(\underline{\underline{\hat{B}}}^e\right)^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\underline{B}}^e & \underline{\underline{\hat{B}}}^e\end{bmatrix}d\zeta = AE\int_{(L)}\left[\begin{array}{c:c}\left(\underline{\underline{B}}^e\right)^T\underline{\underline{B}}^e & \left(\underline{\underline{B}}^e\right)^T\underline{\underline{\hat{B}}}^e \\ \hdashline \left(\underline{\underline{\hat{B}}}^e\right)^T\underline{\underline{B}}^e & \left(\underline{\underline{\hat{B}}}^e\right)^T\underline{\underline{\hat{B}}}^e\end{array}\right]d\zeta .$$

Jelölés: $\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix}\underline{\underline{K}}_{qq}^e & \underline{\underline{K}}_{qa}^e \\ \underline{\underline{K}}_{aq}^e & \underline{\underline{K}}_{aa}^e\end{bmatrix}$.

A merevségi mátrix blokkjainak mérete: $\underline{\underline{K}}_{qq}^e$ (2×2), $\underline{\underline{K}}_{aa}^e$ $(p\times p)$,

$\underline{\underline{K}}_{qa}^e = \left(\underline{\underline{K}}_{aq}^e\right)^T$ $(2\times p)$ - a $\underline{\underline{K}}^e$ szimmetriája miatt.

- Az elem csomóponti terhelésvektora (helyi KR-ben): $\underline{\underline{f}}^e = \int_{(L)}\begin{bmatrix}\left(\underline{\underline{A}}^e\right)^T \\ \left(\underline{\underline{\hat{A}}}^e\right)^T\end{bmatrix}f_\zeta^e(\zeta)d\zeta = \begin{bmatrix}\underline{\underline{f}}_q^e \\ \underline{\underline{\hat{f}}}_a^e\end{bmatrix}$. $\begin{matrix}(2\times 1)\\(p\times 1)\end{matrix}$

- A húzott-nyomott rúdelem potenciális energiája:

$$\pi^e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T & \left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\underline{K}}_{qq}^e & \underline{\underline{K}}_{qa}^e \\ \underline{\underline{K}}_{aq}^e & \underline{\underline{K}}_{aa}^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}^e \\ \underline{\underline{\hat{q}}}^e\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T & \left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\underline{f}}_q^e \\ \underline{\underline{\hat{f}}}_a^e\end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzásokat elvégezve:

$$\pi^e = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T\underline{\underline{K}}_{qq}^e\underline{\underline{q}}^e + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)^T\underline{\underline{K}}_{aa}^e\underline{\underline{\hat{a}}}^e + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T\underline{\underline{K}}_{qa}^e\underline{\underline{\hat{a}}}^e + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)^T\underline{\underline{K}}_{aq}^e - \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T\underline{\underline{f}}_q^e - \left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)\underline{\underline{f}}_a^e .$$

- Az egész rendszer (test) potenciális energiája: $\pi = \sum_e \pi^e$.

Az összegzésnél a csomóponti elmozdulások összeillesztését is el kell végezni $\left(\underline{\underline{q}}^e, \underline{\underline{q}}^{e+1}, \ldots \Rightarrow \underline{\underline{q}}\right)$.

- A potenciális energia minimuma elv alkalmazása:

$$\min\pi \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial\pi}{\partial\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{0}}, \\ \dfrac{\partial\pi}{\partial\underline{\underline{\hat{a}}}^e} = \dfrac{\sum_e \partial\pi^e}{\partial\underline{\underline{\hat{a}}}^e} = \dfrac{\partial\pi^e}{\partial\underline{\underline{\hat{a}}}^e} = \underline{\underline{0}}.\end{array}\right\}$$

Az $\underline{\underline{\hat{a}}}^e$ paraméterek csak az e jelű, azaz egy-egy elemnél fordulnak elő $\Rightarrow$ az $\underline{\underline{\hat{a}}}^e$ szerinti szélsőérték előállítása elemenként elvégezhető:

$$\frac{\partial \pi^e}{\partial \underline{\underline{\hat{a}}}^e} = \underline{\underline{K}}^e_{aa}\underline{\underline{\hat{a}}}^e + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}^e_{qa}}_{\underline{\underline{K}}_{aq}\underline{\underline{q}}^e} + \frac{1}{2}\underline{\underline{K}}_{aq}\underline{\underline{q}}^e - \underline{\underline{f}}^e_a = \underline{\underline{0}}.$$

$$\left(\underline{\underline{K}}^e_{aq}\right)^T$$

Ebből a pótlólagos állandók kifejezhetők: $\underline{\underline{\hat{a}}}^e = -\left(\underline{\underline{K}}^e_{aa}\right)^{-1}\underline{\underline{K}}^e_{aq}\underline{\underline{q}}^e + \left(\underline{\underline{K}}^e_{aa}\right)^{-1} f^e_a$

Visszahelyettesítve az elem potenciális energiájába: $\pi^e = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}^e_{red}\underline{\underline{q}}^e - \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}^e_{red}$.

- Az elem helyi koordináta-rendszerben vett redukált merevségi mátrixa: $\underline{\underline{K}}^e_{red} = \underline{\underline{K}}^e_{qq} - \underline{\underline{K}}^e_{qa}\left(\underline{\underline{K}}^e_{aa}\right)^{-1}\underline{\underline{K}}^e_{aq}$.

- Az elem helyi koordináta-rendszerben vett redukált terhelési vektora: $\underline{\underline{f}}^e_{red} = \underline{\underline{f}}^e_q - \underline{\underline{K}}^e_{qa}\left(\underline{\underline{K}}^e_{aa}\right)^T \underline{\underline{f}}^e_a$.

A helyi KR-ből a vonatkoztatási KR-be történő transzformáció ugyanazzal az összefüggéssel történik, mint hagyományos esetben.

Húzott-nyomott rúdelemnél: $\underline{\underline{K}}^e_{qa} = \underline{\underline{K}}^e_{aq} = \underline{\underline{0}}$.

Ez a kijelölt műveletek elvégzésével egyszerűen igazolható.

- A húzott-nyomott rúdelem potenciális energiája:

$$\pi^e = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}^e_{qq}\underline{\underline{q}}^e + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}^e_{aa}\underline{\underline{\hat{a}}}^e - \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}^e_q - \left(\underline{\underline{\hat{a}}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}^e_a.$$

A húzott-nyomott rúdelemnél az $\underline{\underline{\hat{a}}}^e$ pótlólagos állandók $\underline{\underline{q}}^e$-től függetlenül határozhatók meg:

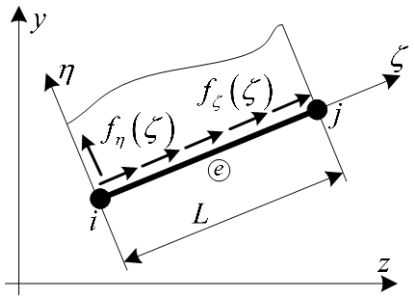
$$\frac{\partial \pi^e}{\partial \underline{\underline{\hat{a}}}^e} = \underline{\underline{K}}^e_{aa}\underline{\underline{\hat{a}}}^e - \underline{\underline{f}}^e_a \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\hat{a}}}^e = \left(\underline{\underline{K}}^e_{aa}\right)^{-1}\underline{\underline{f}}^e_a.$$

A húzott-nyomott rúdelem redukált jellemzői: $\underline{\underline{K}}^e_{red} = \underline{\underline{K}}^e_{qq}$, $\underline{\underline{f}}^e_{red} = \underline{\underline{f}}^e_q$.

Tehát a $\underline{\underline{q}}$ csomóponti paraméterekre ugyanaz a lineáris algebrai egyenletrendszer adódik, mint a fokszámnövelés nélküli esetben.

Húzott-nyomott rúdelemnél tehát a közelítés pontossága elemenként javítható!

6.2. Fokszám növelés húzott-nyomott, hajlított-nyírt rúdelemnél



Adott:

- a terhelés: $f_\zeta(\zeta)$, $f_\eta(\zeta)$,
- a rúdelem geometriája: A, I_ξ, L,
- a rúdelem anyaga: E.

A húzás-nyomásra ugyanaz érvényes, mint az előző elemnél.

Hajlítás: a *Bernoulli* elmélet szerint

$w^e(\zeta)$ - a középvonal pontjainak rúdirányú elmozdulása,

$v^e(\zeta)$ - a középvonal pontjainak rúdra merőleges irányú elmozdulása (lehajlás),

$\varphi^e_\xi = \varphi^e = -\frac{dv^e}{d\zeta} = -\left(v^e\right)'$ - a keresztmetszet szögelfordulása a ξ tengely körül,

$\kappa^e = \frac{d\varphi^e}{d\zeta} = -\frac{d^2v^e}{d\zeta^2} = -\left(v^e\right)''$ - a középvonal görbülete,

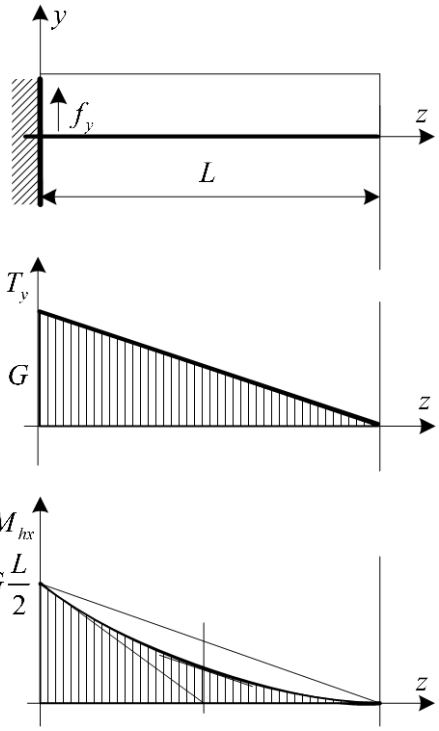
$M_{h\xi} = M_h = I_\xi E\kappa = -I_\xi E\left(v^e\right)''$ - a hajlító nyomaték,

$T_\eta = T = -\dfrac{dM_h}{d\zeta} = I_\xi E\left(v^e\right)'''$ - a nyíróerő.

$$T^e(\zeta) = T^e(\zeta=0) + \int_{\zeta=0}^{\zeta} f_\eta^e(\zeta)\,d\zeta \qquad \Rightarrow \qquad f_\eta^e(\zeta) = \frac{dT}{d\zeta} = I_\xi E(v)^{IV}$$

Ha van vonal mentén megoszló terhelés, akkor a $T^e(\zeta)$ nyíróerő rúdelemként nem állandó.

Pl.: önsúlyával terhelt befalazott tartó



A terhelés: $f_y = -1\cdot A\gamma = -A\rho g$.

γ - fajsúly, g - gravitációs gyorsulás,

ρ - tömegsűrűség

A nyíróerő: $T_y(\zeta) = A\rho g(L-\zeta)$ - lineáris függvény.

$$T_y(\zeta=0) = \underset{V}{AL}\ \underset{\gamma}{\rho g} = G, \qquad T_y(\zeta=L) = 0.$$

A hajlító nyomaték:

$$M_{hx}(\zeta) = A\rho g\frac{(L-\zeta)^2}{2} \text{ - négyzetes függvény.}$$

$$M_{hx}(\zeta=0) = \underbrace{A\rho g L}_{G}\frac{L}{2} = G\frac{L}{2}$$

$$M_{hx}\left(\zeta=\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(G\frac{L}{2}\right), \qquad M_{hx}(\zeta=L) = 0.$$

Az elmozdulásmező szokásos (köbös) közelítése:

$$v^e(\zeta) = a_1 + a_2\zeta + a_3\zeta^2 + a_4\zeta^3,$$

$$\left[v^e(\zeta)\right]' = a_2 + 2a_3\zeta + 3a_4\zeta^2,$$

$$\left[v^e(\zeta)\right]'' = 2a_3 + 6a_4\zeta,$$

$$\left[v^e(\zeta)\right]''' = 6a_4,$$

$$\left[v^e(\zeta)\right]^{IV} = 0.$$

Ez a közelítés csak $T_\eta^e =$ állandó, $\left(f_\eta^e = 0\right)$ esetén képes leírni a pontos megoldást.

Az elmozdulásmező közelítése fokszámnöveléssel: $w^e(\zeta) = a_{11} + a_{12}\zeta + \hat{a}_{11}\zeta^2 + \hat{a}_{12}\zeta^3 + \ldots$

$\mapsto$ új tagok

$$v^e(\zeta) = a_{21} + a_{22}\zeta + a_{23}\zeta^2 + a_{24}\zeta^3 + \hat{a}_{21}\zeta^4 + \hat{a}_{22}\zeta^5 + \ldots$$

$\mapsto$ új tagok

A közelítés mátrix alakban:

$$\underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} w^e \\ v^e \end{bmatrix}} = \underset{(2\times6)}{\left[\begin{array}{cc:cccc} 1 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 \end{array}\right]} \underset{(6\times1)}{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{24} \end{bmatrix}} + \underset{(2\times2p)}{\left[\begin{array}{ccc:ccc} \zeta^2 & \zeta^3 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \zeta^4 & \zeta^5 & \ldots \end{array}\right]} \underset{(2p\times1)}{\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} \\ \hat{a}_{12} \\ \vdots \\ \hat{a}_{21} \\ \hat{a}_{22} \\ \vdots \end{bmatrix}}$$

Az elmozdulásmező közelítése mátrix alakban tömören: $\underline{\underline{u}}^e(\zeta)=\underline{\underline{\phi}}^e(\zeta)\underline{\underline{a}}^e+\underline{\underline{\hat{\phi}}}^e(\zeta)\underline{\underline{\hat{a}}}^e$

Csomóponti általánosított elmozdulásvektor: $\underline{\underline{q}}^e=\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}_i\\ \underline{\underline{q}}_j\end{bmatrix}^e$, $\underline{\underline{q}}_i=\begin{bmatrix}w_i\\ v_i\\ \varphi_i\end{bmatrix}$.

A *Bernoulli* elmélet szerint: $\varphi_i=-\left(\dfrac{dv^e}{d\zeta}\right)_i^e$, A *Timoshenko* elmélet szerint: $\varphi_i=-\left(\dfrac{dv^e}{d\zeta}\right)_i+\psi_i$.

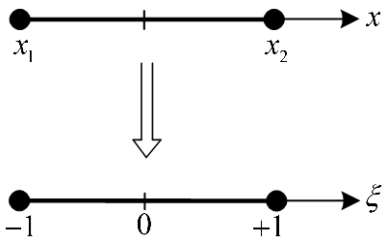
A gondolatmenet az előzőeknek megfelelően folytatódik.

Bernoulli-féle rúdelmélet (húzás-nyomási + hajlítási energia figyelembevétele): $\underline{\underline{K}}_{qa}^e=\left(\underline{\underline{K}}_{aq}^e\right)^T=\underline{\underline{0}}$.

Timoshenko-féle rúdelmélet (húzás-nyomási + hajlítási + nyírási energia figyelembevétele): $\underline{\underline{K}}_{qa}^e=\left(\underline{\underline{K}}_{aq}^e\right)^T\neq\underline{\underline{0}}$.

6.3. A fokszámnövelés általánosítása síkbeli esetre

a) Általánosítás egydimenziós esetre: vonalelem



A valóságos vonalelem:

Leképezés: $x(\xi)=\sum_{i=1}^{2}h_i(\xi)x_i$.

A leképezett elem.

Az elmozdulásmező közelítését (az izoparametrikus eljárásnak megfelelően) a leképezett elemen írjuk fel:

$u(\xi)=\sum_{i=1}^{2}h_i(\xi)u_i+\sum_{i=3}^{2+p}h_i(\xi)\hat{a}_{i-1}$,

$i=1,2$ $\quad h_i(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)$ - hagyományos (külső) alakfüggvények,

$i=3,\ldots(2+p)$ $\quad h_i(\xi)=\phi_{i-1}(\xi)$ - belső alakfüggvények.

A belső alakfüggvények előállítása: $\phi_i(\xi)=\sqrt{\dfrac{2i-1}{2}}\int_{t=1}^{\xi}P_{i-1}(t)\,dt$.

$P_n(t)$ - *Legendre* (lözsan) polinomok ($i=2,3,\ldots$).

Az *n*-ed fokú *Legendre*-féle differenciálegyenlet:

$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$, $-1\le x\le 1$, $\quad n=0,1,2,\ \ldots$.

Ismeretlen: $y=y(x)$.

Megoldás: $y=y(x)=P_n(x)$ - *n*-ed fokú *Legendre*-féle polinom.

A polinomok előállítása a *Bonnet* (boné)-féle rekurziós formulával is történhet:

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}\left[(2n+1)xP(x)-nP_{n-1}(x)\right].$$

Más előállítás is lehetséges.

Az első néhány *Legendre*-féle polinom és belső alakfüggvény:

$$P_0(x)=1,$$

$$P_1(x)=x, \qquad \phi_1(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right), \qquad \phi_2(\xi)=\frac{3}{2\sqrt{6}}\left(\xi^2-1\right),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right), \qquad \phi_3(\xi)=\frac{5}{2\sqrt{10}}\left(\xi^3-\xi\right),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right), \quad \phi_4(\xi)=\frac{1}{8\sqrt{14}}\left(35\xi^4-42\xi^2+7\right),$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15\right), \qquad \vdots$$

$$\vdots$$

Az *i* jelű alakfüggvény előállítása: $\phi_i(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2(2i-1)}}\left[P_i(\xi)-P_{i-2}(\xi)\right], \quad i=2,3, \quad \ldots$

A *Legendre*-féle polinomok tulajdonsága:

Ortogonalitás (a merőlegesség általánosítása): $\int_{x=-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx=\begin{cases}\frac{2}{2i+1}, & \text{ha } i=j,\\ 0, & \text{ha } i\neq j.\end{cases}$

A belső alakfüggvények tulajdonságai: (A Legendre-féle polinomok értelmezéséből és ortogonalitásából következik)

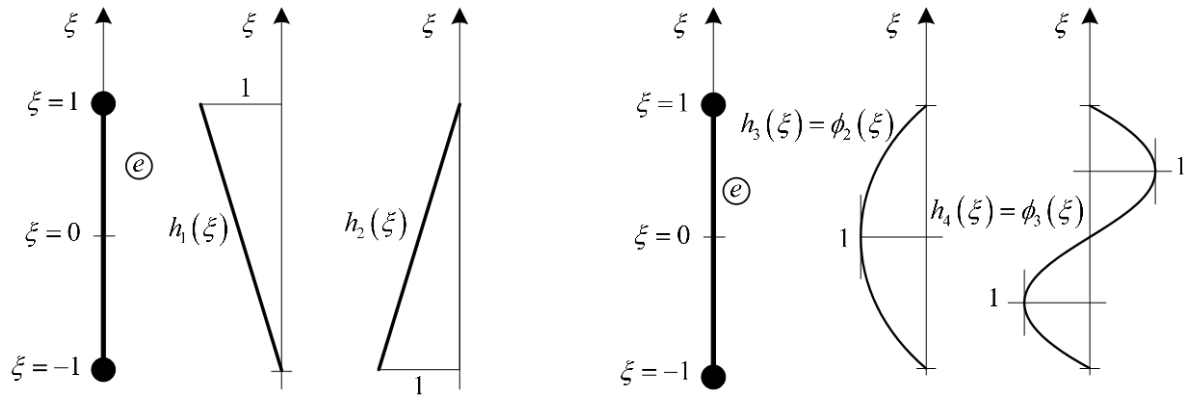
$$\phi_j(-1)=\phi_j(+1)=0, \quad \text{ha } j=2,3,4, \quad \ldots$$

$$\int_{x=-1}^{1}\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx=\begin{cases}1, & \text{ha } i=j\\ 0, & \text{ha } i\neq j\end{cases}$$ A belső alakfüggvények deriváltjai ortonormáltak.

Ortonormált: ortogonális és a normája 1.

Függvény normája (mértéke, abszolút értéke): $\|f(x)\|=\int_{x=-1}^{1} f(x)f(x)dx$

Külső alakfüggvények: Belső alakfüggvények



Elemhatárok: $\xi=\pm 1$

A belső alakfüggvények az elemhatárokon eltűnnek $\Rightarrow$ nem kell illeszteni őket.

b) *Általános 2D esetre – négy csomópontú síkbeli elem*

Függvénytér: függvények halmaza.

Bázisfüggvények: azok a függvények, amelyekből a függvénytér bármely eleme (bármely függvény) előállítható.

Pl.: $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \quad \ldots$

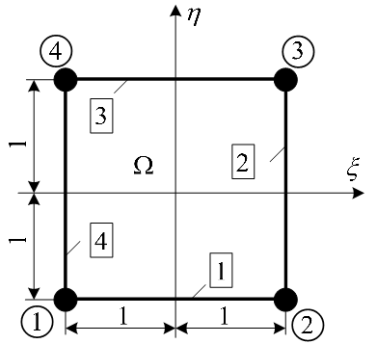
Hierarchikus felépítésű alakfüggvények alkalmazásával nagyon jó eredmények érhetők el.

Hierarchikus felépítésű alakfüggvények:

A $p+1$ fokszámú alakfüggvényeknek tartalmazniuk kell az összes p fokszámú alakfüggvényt és legyen közöttük az elem csomópontjaiban és oldalain el nem tűnőek (nem nulla értékűek) száma a lehető legkisebb.

Ennek a feltételnek megfelelő alakfüggvényeket akarunk felvenni egy négy csomópontú négyszög alakú síkbeli elem esetén.

Lineáris síkbeli elem:



Csomópontok ≡ sarokpontok.

Leképezés:
$$\left.\begin{aligned} x(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\,x_i \\ y(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\,y_i \end{aligned}\right\}$$

(i) - csomópont jelölése,

[j] - az oldal jelölése

Az elmozdulásmező közelítése:

$$\left.\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)u_i + \sum_{j=2}^{p}\sum_{s=1}^{4} h_{js}(\xi,\eta)a^{(u)}_{(j-1)s} + \sum_{j=1}^{b}\hat{h}_j(\xi,\eta)\hat{a}^{(u)}_j, \\ v(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)v_i + \sum_{j=2}^{p}\sum_{s=1}^{4} h_{js}(\xi,\eta)a^{(v)}_{(j-1)s} + \sum_{j=1}^{b}\hat{h}_j(\xi,\eta)\hat{a}^{(v)}_j. \end{aligned}\right\}$$

p - a bázisfüggvényben előforduló legmagasabb fokszám.

$\xi^i\eta^j$ - $i, j = 0,1,2, \quad \dots \quad , p$.

- A csomópontokhoz tartozó alakfüggvények:

  $h_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i), \quad i = 1,2,3,4.$

  ξ_i, η_i - az i jelű csomópont helykoordinátái.

- Az oldalakhoz tartozó alakfüggvények:

  $i \geq 2$ -nél jelennek meg, $4(p-1)$ számú függvény írható fel:

  $h_{i1} = \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_i(\xi), \quad h_{i2} = \frac{1}{2}(1+\xi)\phi_i(\xi), \quad h_{i3} = \frac{1}{2}(1+\eta)\phi_i(\xi), \quad h_{i4} = \frac{1}{2}(1-\xi)\phi_i(\xi),$

  $i = 2,3,4, \quad \dots \quad , p.$

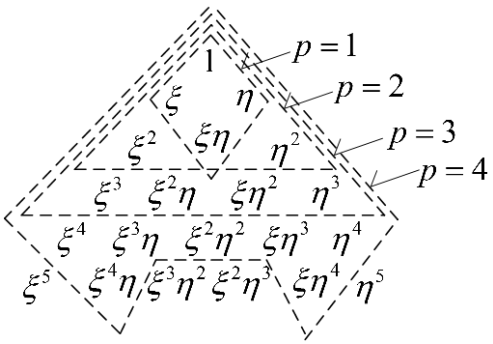
- A belső alakfüggvények:

  $i \geq 4$ -nél jelennek meg.

  $b = \frac{(j-2)(j-3)}{2}$ számú függvény írható fel:

$$\begin{aligned} &\hat{h}_1(\xi,\eta) = \phi_2(\xi)\phi_2(\xi), && \hat{h}_2(\xi,\eta) = \phi_2(\xi)\phi_3(\xi), \\ &\hat{h}_3(\xi,\eta) = \phi_3(\xi)\phi_2(\xi), && \hat{h}_4(\xi,\eta) = \phi_4(\xi)\phi_2(\xi), \\ &\hat{h}_5(\xi,\eta) = \phi_3(\xi)\phi_3(\xi), && \hat{h}_6(\xi,\eta) = \phi_2(\xi)\phi_4(\xi), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bázisfüggvények hierarchikus felépítés esetén:



Megjegyzések:

- A $(p+1)$ -ed fokú közelítés mindig tartalmazza a p -ed fokú közelítést.
- Az alakfüggvények deriváltjainak ortogonalitása csökkenti a merevségi mátrix sávszélességét.